数理解析研究所講究録
第 1879 巻 2014 年 28-33

非線形SDPに対する主双対内点法の超一次収束性

山川 雄也, 山下 信雄
京都大学 大学院情報学研究科 数理工学専攻
Yamakawa Yuya[1], Yamashita Nobuo
Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto Univerisity

1 はじめに

本稿では，次に定義する非線形半正定値計画問題 (Nonlinear Semidefinite Programming, 以下，非線形 SDP) を扱う．

$$\begin{array}{ll} \underset{x\in\mathbf{R}^n}{\text{minimize}} & f(x), \\ \text{subject to} & g(x)=0, \quad X(x)\succeq 0 \end{array} \tag{1}$$

ここで，関数 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, $g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$, $X:\mathbf{R}^n\to\mathbf{S}^d$ はそれぞれ二回連続的微分可能な関数である．また，$\mathbf{S}^d$ は d 次実対称行列の集合を表し，$X(x)\succeq 0$ ($X(x)\succ 0$) は行列 $X(x)$ が半正定値 (正定値) であることを表す．非線形 SDP は様々な数理計画問題を包括する広いクラスの問題であり，線形計画問題，二次錐計画問題，線形半正定値計画問題 (線形 SDP)，非線形計画問題などは非線形 SDP へ定式化することが可能である．

非線形 SDP(1) の解法として，主双対内点法がいくつか提案されている．それらの内点法には，中心化 KKT 条件に基づくもの [4] と，シフト付き中心化 KKT 条件に基づくもの [2] があり，それぞれ大域的収束性が示されている．一方，中心化 KKT 条件に基づく内点法に対しては超一次収束性は示されているが [4]，シフト付き中心化 KKT 条件に基づく主双対内点法の超一次収束性はまだ示されていない．そこで本稿では，中心化 KKT 条件とシフト付き中心化 KKT 条件を含む近似 KKT 条件に基づいたアルゴリズムを提案し，いくつかの仮定の下でアルゴリズムの超一次収束性を示す．

以下では，本稿の構成を記す．2 章では非線形 SDP(1) の最適性条件，近似 KKT 条件に基づいたアルゴリズムを紹介する．3 章では，いくつかの仮定を与え，それらの仮定の下で提案アルゴリズムの超一次収束性を示す．最後に，まとめについて記す．

2 非線形SDPに対する最適性条件と主双対内点法

非線形 SDP(1) の KKT 条件は次式で与えられる．

$$\begin{gathered} \nabla_x L(w)=0, \quad g(x)=0, \quad X(x)\circ Z=0, \\ X(x)\succeq 0, \quad Z\succeq 0 \end{gathered} \tag{2}$$

[1]e-mail: yamakawa@amp.i.kyoto-u.ac.jp

ただし，

$$L(w) \equiv f(x) - g(x)^T y - \mathrm{svec}(X(x))^\top \mathrm{svec}(Z), \quad X(x) \circ Z \equiv \frac{X(x)Z + ZX(x)}{2}$$
$$\mathrm{svec}(U) = [U_{11}, \sqrt{2}U_{21}, \ldots, \sqrt{2}U_{d1}, U_{22}, \sqrt{2}U_{32}, \ldots, \sqrt{2}U_{d2}, U_{33}, \ldots, U_{dd}]^\top, (U \in \mathbf{S}^d)$$

で定義する．ラグランジュ関数Lにおける，$y \in \mathbf{R}^m, Z \in \mathbf{S}^d$はそれぞれ$g(x) = 0, X(x) \succeq 0$に対するラグランジュ乗数である．また，$w = [x, y, \mathrm{svec}(Z)] \in \mathbf{R}^l$，$l \equiv n + m + \frac{d(d+1)}{2}$である．

ここで，パラメータ$\mu > 0$，$\kappa \in [0, \infty)$を導入して，以下の近似KKT条件を考える．

$$r_\kappa(w, \mu) \equiv \begin{bmatrix} \nabla_x L(w) \\ g(x) + \kappa\mu y \\ X(x) \circ Z - \mu I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X(x) \succ 0, \quad Z \succ 0 \tag{3}$$

$\kappa = 0$のとき(3)は中心化KKT条件，$\kappa = 1$のときはシフト付き中心化KKT条件となる．以下では，$X(x) \succ 0$，$Z \succ 0$を満たす点を内点と呼ぶ．

次に，KKT点を求めるためのアルゴリズムについて紹介する．提案アルゴリズムでは，(3)に対するニュートン方程式

$$\begin{bmatrix} \nabla^2_{xx} L(w) & -J_g(x) & -A(x) \\ J_g(x) & \kappa\mu I & 0 \\ (Z \otimes_S I)A(x) & 0 & (X \otimes_S I) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \mathrm{svec}(\Delta Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla_x L(w) \\ -g(x) - \kappa\mu y \\ \mathrm{svec}(\mu I - X \circ Z) \end{bmatrix} \tag{4}$$

を解き，ニュートン方向を求め点列を更新する．ただし，J_gは関数gのヤコビ行列であり，

$$A(x) \equiv [\mathrm{svec}(A_1(x)), \ldots, \mathrm{svec}(A_n(x))],$$
$$A_i(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} X(x), \quad i = 1, \ldots, n$$

である．以上を用いて，近似KKT条件(3)に基づいたアルゴリズムを以下に記述する．

Algorithm 1

Step 0. $\varepsilon > 0, \kappa \geq 0$と$0 < \tau < 1$をとり，内点$w_0 = [x_0, y_0, Z_0]$を与え，$k = 0$とする．

Step 1. もし$\|r_\kappa(w_k, 0)\| \leq \varepsilon$を満たせば終了する．

Step 2. $\mu_k = \|r_\kappa(w_k, 0)\|^{1+\tau}$とする．ニュートン方程式(4)を解き$\Delta w_k$を求め$w_{k+1} = w_k + \Delta w_k$と更新する．

Step 3. $k := k + 1$と更新しStep 1.へ戻る．

このアルゴリズムでは大域的収束が保証されていない．大域的収束するためには，[2]などのように，適当なメリット関数を用いてステップ幅α_kを定め，$w_{k+1} = w_k + \alpha_k \Delta w_k$とすれば良い．ここでは局所的な収束のみを議論するため，そのような直線探索は省略している．

3 Algorithm 1の超一次収束性

本節では，KKT条件(2)を満たす点(KKT点)を $w^* = [x^*, y^*, \mathrm{svec}(Z^*)]$ とし，ニュートン方程式(4)のヤコビ行列を $M(w,\mu)$ とする．このヤコビ行列は $M(w,\mu) = M_0(w) + \kappa\mu M_I$ と分解できる．ただし，

$$M_0(w) \equiv \begin{bmatrix} \nabla^2_{xx}L(w) & -J_g(x) & -A(x) \\ J_g(x) & 0 & 0 \\ (Z \otimes_S I)A(x) & 0 & (X \otimes_S I) \end{bmatrix}, \quad M_I \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であり，I_m は $m \times m$ の単位行列である．これらを用いて，まずAlgorithm 1の超一次収束性に必要な仮定を以下に与える．

(仮定1) $\nu_L > 0$ が存在して $M_0(w)$ は $\mathcal{V}_L \equiv \{w \in \mathbf{R}^l \mid \|w - w^*\| \le \nu_L\}$ 上でリプシッツ連続である．

(仮定2) 問題(1)に対する最適性の二次の十分条件が x^* において成り立つ．

(仮定3) 狭義相補性条件が x^* において成り立つ．

(仮定4) 非退化条件が x^* において成り立つ．

これらの仮定の詳細については[4]を参照して欲しい．

まず，(仮定1)より任意の $w_1, w_2 \in \mathcal{V}_L$ に対して，次の不等式を満たす正の定数 L_M が存在する．

$$\|M_0(w_1) - M_0(w_2)\| \le L_M \|w_1 - w_2\|$$

これと[1, 3]より得られる不等式を以下に与える．

Lemma 1 *[1, 3] (仮定1)* が成り立つとする．このとき，任意の $w_1, w_2 \in \mathcal{V}_L, \mu \ge 0$ に対して

$$\|r_\kappa(w_1,\mu) - r_\kappa(w_2,\mu) - M(w_2,\mu)(w_1 - w_2)\| \le L_M \|w_1 - w_2\|^2$$

が成り立つ．また，ある正の数 L_r が存在して，

$$\|r_\kappa(w_1,\mu) - r_\kappa(w_2,\mu)\| \le L_r \|w_1 - w_2\|$$

が成り立つ． □

続いて，(仮定2)–(仮定4)より $M_0(w^*)$ の正則性が示される．

Theorem 1 *[4] (仮定2)–(仮定4)* が成り立つとする．このとき，$M_0(w^*)$ は正則となる．
□

Theorem 1 と陰関数定理を用いれば，次の Lemma が成り立つ.

Lemma 2 *[4] (仮定 2)-(仮定 4)* が成り立つとする．このとき，ある区間 $[0,\gamma]$ で定義される微分可能な連続関数 $\bar{w}(\mu) = [\bar{x}(\mu), \bar{y}(\mu), \mathrm{svec}(\bar{Z}(\mu))] \in \mathbf{R}^l$ が存在し，

$$\bar{w}(0) = w^*, \quad r_\kappa(\bar{w}(\mu), \mu) = 0 \quad \text{for any } \mu \in [0,\gamma],$$
$$X(\bar{x}(\mu)) \succ 0, \quad \bar{Z}(\mu) \succ 0 \quad \text{for any } \mu \in (0,\gamma]$$

を満たす. □

以下では，$\{\bar{w}(\mu) | \mu \in [0,\gamma]\}$ を中心パスと呼ぶことにする．また，Theorem 1 より (仮定 2)-(仮定 4) の下であれば行列 $M_0(w^*)$ が正則であるから，十分小さなある $\varepsilon \in (0,1)$ が存在し，以下を満たす行列 G は正則である.

$$\|G - M_0(w^*)\|_F < \varepsilon$$

さらに，行列 $M_0(w)$ の連続性から，$\|w - w^*\| \le \nu_M$ ならば

$$\|M_0(w) - M_0(w^*)\|_F \le \frac{1}{3}\varepsilon$$

であるとする．この ν_M と ν_L を用いて w^* の近傍 $\mathcal{V}$ を以下のように定義する.

$$\mathcal{V} \equiv \{w \in \mathbf{R}^l \mid \|w - w^*\| \le \nu \equiv \min\{\nu_M, \nu_L\}\}$$

これらを用いて，ニュートン方程式 (4) のヤコビ行列 $M(w,\mu)$ の正則性を保証する補題を与える.

Lemma 3 *(仮定 2)-(仮定 4)* が成り立つとする．このとき，任意の $w \in \mathcal{V}$, $\mu \in [0,s]$ に対して $M(w,\mu)$ は正則となる．ただし，$s \equiv \frac{\varepsilon}{6(\kappa+1)\sqrt{m}}$ とする. □

Lemma 3 と集合 $\mathcal{V}$, $[0,s]$ の有界性から

$$U_M \equiv \sup_{w\in\mathcal{V},\mu\in[0,s]} \|M(w,\mu)^{-1}\|_F, \quad U_y \equiv \sup_{w\in\mathcal{V}} \|y\|^2$$

を定義すれば，これらは有界である.

次に，$\mathcal{V}$ の部分集合を以下に定義する.

$$\mathcal{N}(\mu) \equiv \{w \in \mathcal{V} \mid \|r_\kappa(w,\mu)\| \le \alpha\mu,\ X(x) \succ 0,\ Z \succ 0\}$$

ただし，$0 < \alpha < 1$ である．これと，$0 < \theta \le \min\{\gamma, s\}$ を満たす θ を用いて

$$\Theta(\theta) \equiv \cup_{\mu\in[0,\theta]}\mathcal{N}(\mu)$$

を定義する．Lemma 2 より，この集合は中心パスの近傍と考えることが出来る．さらに，これらを用いて以下を定義する．

$$U_w(\theta) \equiv \sup_{w \in \Theta_1(\theta), \mu \in [0,\theta]} \|w - \bar{w}(\mu)\|$$

定義から $t \to 0$ のとき $U_w(t) \to 0$ であることに注意する．このとき，ある θ_0 が存在して

$$L_M U_M U_w(\theta_0) = \frac{2}{3}$$

を満たす．これらを用いて，超一次収束性の証明で必要となる不等式を与える．

Lemma 4 *(仮定 1)-(仮定 4)* が成り立つとし，θ は $0 \le \theta \le \theta_1$, $\theta_1 \equiv \min\{\gamma, s, \theta_0\}$ を満たすとする．このとき，任意の $w \in \Theta(\theta), \mu \in [0,\theta]$ に対して

$$\|w - \bar{w}(\mu)\| \le U_r \|r_\kappa(w,\mu)\|$$

を満たす正の数 U_r が存在する． □

続いて，θ をうまく選ぶことで，Algorithm 1 により生成される点列が $\Theta(\theta)$ に含まれることが示される．

Lemma 5 *(仮定 1)-(仮定 4)* が成り立つとする．このとき，*Algorithm 1* により生成される点列 $\{w_k\}$ と $\{\mu_k\}$ は

$$\begin{array}{ll} w_k \in \mathcal{N}(\mu_{k-1}) \subset \Theta(\widetilde{\theta}) & k = 1, 2, \dots \\ \mu_0 < \theta, \ 0 \le \mu_k \le c\mu_{k-1} & k = 1, 2, \dots \end{array}$$

を満たす．ただし，$\widetilde{\theta} \equiv \min\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ であり，

$$\theta_2 \equiv \left[\frac{2}{3(\alpha + \sqrt{\kappa U_y + d})^{1+\tau}}\right]^{\frac{1}{\tau}}, \quad \theta_3 \equiv \left[\frac{\nu}{U_r + U_M(1 + \sqrt{\kappa U_y + d})}\right]^{1+\tau},$$

$$\theta_4 \equiv \left[\frac{\alpha}{L_M U_M^2 (1 + \sqrt{\kappa U_y + d})^2}\right]^{\frac{1+\tau}{1-\tau}}, \quad c \equiv (\alpha + \sqrt{\kappa U_y + d})^{1+\tau} \theta^\tau$$

である． □

Lemma 5 より，初期点を $w_0 \in \Theta(\widetilde{\theta})$ とすれば，Algorithm 1 により生成される点列は $w_k \in \Theta(\widetilde{\theta})$, $k = 1, 2, \dots$ を満たすことが示された．これを用いて，Algorithm 1 の超一次収束性が示される．

Theorem 2 *(仮定 1)-(仮定 4)* が成り立つとする．このとき，初期点を $w_0 \in \Theta_2(\widetilde{\theta})$ として選べば，*Algorithm 2* により生成される点列 $\{w_k\}$ は w^* へ超一次収束する． □

4 まとめ

本稿では，主双対内点法に基づいたAlgorithm 1を提案し，その超一次収束性に関する議論を行った．Algorithm 1は，中心化KKT条件[4]とシフト付き中心化KKT条件[2]を包括した，近似KKT条件に基づいたアルゴリズムである．収束証明では，いくつかの仮定を与え，それらの仮定の下でAlgorithm 1により生成される点列がKKT点へ超一次収束することを示した．

参考文献

[1] Ortega, J., Rheinboldt, W.: Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Academic Press, 1970.

[2] Kato, A., Yabe, H., Yamashita, H.: An interior point method with a primal-dual quadratic barrier penalty function for nonlinear semidefinite programming, Technical Report, Department of Mathematical Information Science, Tokyo University of Science, 2012.

[3] Wenyu, Sun., Ya-Xiang, Yuan.: Optimization theory and methods, Springer Science+Business Media, 2006.

[4] Yamashita, H., Yabe, H.: Local and superlinear convergence of a primal-dual interior point method for nonlinear semidefinite programming, Mathematical Programming **132**, 1-30 (2012).